

RECAP LOIS

* loi uniforme = sa densité de proba est une constante
 $q = (1-p)$
 $X \sim U([1, m])$

ensemble: $[1, \dots, m]$

expression $\rightarrow P(X=k) = \frac{1}{m}$

$$E(X) = \frac{m+1}{2}$$

$$V(X) = \frac{m^2-1}{12}$$

* loi bernouilli = 2 issues (succès/échec)
 $X \sim B(1, p)$

Ens: $\{0, 1\}$

$m=1$

Exp: $P(X=1)=p / P(X=0)=q$

$$E(X)=p$$

$$V(X)=pq$$

* loi binomiale = X est égale au nbr de succès obtenus dans une série de m épreuves de Bernoulli de proba p (indépendantes)

$$X \sim B(m, p)$$

ens: $[0, \dots, m]$

$$\text{Exp: } P(X=k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$$

$$E(X) = mp$$

$$V(X) = mpq$$

* loi géométrique

$$X \sim G(p)$$

$$\text{ens } [1 \dots +\infty[$$

$$\text{ex: } P(X=k) = q^{k-1} \times p$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

$X \rightarrow$ Rang apparition du succès

* loi hypergéométrique = tirer une partie d'un ens a bcp éléments

$$X \sim H(N, m, p)$$

$$\text{ens } [0 \dots m]$$

$$\text{Ex: } P(X=k) = \frac{C_{Np}^k \times C_{Nq}^{m-k}}{C_N^m}$$

$$E(X) = mp$$

$$V(X) = mpq \frac{N-m}{N-1}$$

* loi poisson = nbr de succès dans un intervalle

$$X \sim P(\lambda)$$

$$\text{ens } [0 \dots +\infty[$$

$$\text{ex: } P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

* loi normale

$$X \sim N(m; \sigma^2)$$

avec la variance

$$Y = \frac{X - m}{\sigma} \quad \begin{matrix} \nwarrow X=k \\ \nearrow E(X) \end{matrix}$$

suit une loi normale (0; 1)

$\rightarrow$ chercher sur table loi normale

$$E(X) = m$$

$$V(X) = \sigma^2$$

* loi exponentielle = X est la durée de quelque chose
 $X \sim E(\lambda)$

$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \leftarrow \text{qd espérance moyenne est donnée dans l'énoncé, paramètre } \lambda \text{ facile à trouver}$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

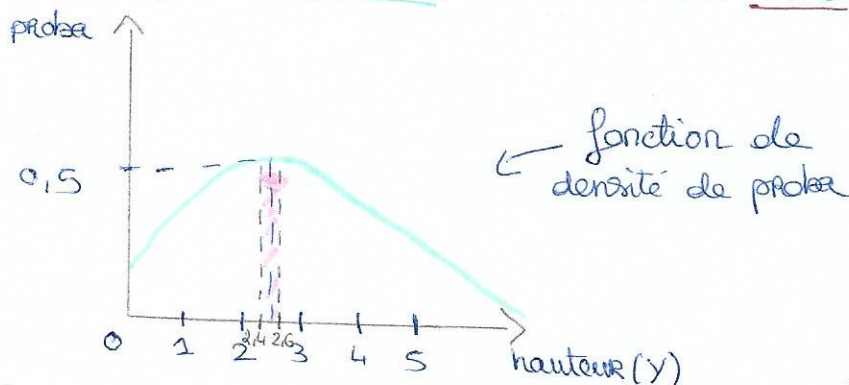
* loi à densité = X infinité de valeurs dans un intervalle

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx \rightarrow P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Exemple introductif : X = hauteur exact de pluie demain



? $P(X=2,5) \neq 0,5$ car il n'est pas possible de mesurer avec exactitude la hauteur de la pluie. Ainsi, $P(X=2,5) = 0$

→ Pour trouver une réponse approximative

$P(2,4 < X < 2,6) \Rightarrow$ il faut chercher l'air de la surface

$$\text{Donc } \Rightarrow P(2,4 < X < 2,6) = \int_{2,4}^{2,6} f(x) dx$$

RAPPEL

Correction en continuité:

$$\circ P(a \leq X \leq b) \Rightarrow P(a - \frac{1}{2} \leq X \leq b + \frac{1}{2})$$

$$\circ P(a < X < b) \Rightarrow P(a + \frac{1}{2} \leq X \leq b - \frac{1}{2})$$

Convergence en loi

* Approximation loi hypergéométrique $\rightarrow$ loi binomiale
 $H(N, m, p) \rightarrow B(m, p)$

$$\frac{m}{N} < 0,1$$

Exemple:

Une tombola met un jeu 1000 billets dont 10 gagnant.

J'en achète 10.

Quelle est la proba que j'obtienne un billet gagnant au moins?

$$X \sim H(1000; 10; 0,01) \quad \underbrace{\frac{10}{1000}}$$

$$\frac{m}{N} = \frac{10}{1000} = 0,01 < 0,1 \Rightarrow X \sim B(10; 0,01)$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X=0) \\ &= 1 - C_{10}^0 (0,01)^0 (0,99)^{10} \\ &\approx 0,09561 \approx 9,56\% \end{aligned}$$

* Approximation loi binomiale $\rightarrow$ loi poisson
 $B(m, p) \rightarrow P(mp)$

$$m \gg 30 \text{ et } p \leq 0,1 \text{ ou } m \gg 50, mp \leq 5$$

Exemple:

Une pièce truquée tombe sur pile avec $p=0,05$ et face $1-p=0,95$.

On lance 100 fois.

Quelle est la proba d'obtenir 2 fois pile?

$$X \sim B(100; 0,05)$$

$$100 \gg 30 \text{ et } 0,05 < 0,1 \Rightarrow$$

$$X \sim P(5) \rightarrow 100 \times 0,05$$

sans appo:

$$P(X=2) = C_{100}^2 (0,05)^2 (0,95)^{98} \approx 0,0812 \approx 8,12\%$$

avec appo:

$$P(X=2) = e^{-5} \times \frac{5^2}{2!} \approx 0,084 \approx 8,40\%$$

* Approximation loi binomiale $\rightarrow$ loi normale

$$B(m, p) \rightarrow N(np, npq)$$

$$n \gg 30 ; p \approx 0,5 \quad np \gg 5 \quad nq \gg 5$$

Exemple :

Une pièce de monnaie tombe sur pile avec $p=0,4$ et face $0,6$.
On lance 100 fois la pièce.

Quelle est la proba d'obtenir au plus 50 fois pile ? Exactement 50 ?

$$X \sim B(100; 0,4)$$

$$100 \gg 30 ; \overset{100 \times 0,4}{40} \gg 5 ; \overset{100 \times 0,6}{60} \gg 5 \Rightarrow X \sim N(\overset{100 \times 0,4}{40}; \overset{100 \times 0,4 \times 0,6}{24})$$

$$P(X \leq 50) = P\left(\frac{X-40}{24} \leq \frac{50-40}{24}\right)$$

$$= P\left(\frac{X-40}{24} \leq 1,58\right) \rightarrow \text{chercher table loi normale}$$

$$\approx 0,9429 \approx 94,29\%$$

* Approximation loi poisson $\rightarrow$ loi normale

$$P(\lambda) \rightarrow N(\lambda; \sqrt{\lambda})$$

$$\lambda \gg 10$$

Exemple :

Le nbr de clients se présentant à la caisse d'un supermarché en 1h suit une loi Poisson paramétrée 30

Quelle est la proba qu'il y ait plus de 20 clients en 1h ?

$$X \sim P(30)$$

$$30 \gg 10 \Rightarrow X \sim N(30; \sqrt{30})$$

$$P(X \leq 20) = P\left(\frac{X-30}{\sqrt{30}} \leq \frac{20-30}{\sqrt{30}}\right)$$

$$= P(Z \leq -1,82)$$

$$= P(Z \geq 1,82)$$

$$= 1 - P(Z < 1,82) \rightarrow \text{Table}$$

$$= 1 - 0,9656$$

$$= 0,034 = 3,4\%$$

$$P(X > 20) = 100 - 3,4 = 96,6\%$$